Curso de Pós-graduação em Física - UFF

Introdução a Sistemas Estocásticos e Modelos com Estados Absorventes - 2016.2

Prof. Nuno Crokidakis

1ª Série de Exercícios (Data de entrega: 07/10/2016)

1. Mostre que a distribuição de Poisson

$$p_\ell = e^{-\alpha}\alpha^\ell/\ell!$$

pode ser obtida a partir da distribuição binomial

$$p_\ell = \begin{pmatrix} N \\ \ell \end{pmatrix} a^\ell b^{N-\ell}$$

tomando o limite em que $N \to \infty$ e $a \to 0$ com $aN = \alpha$ constante.

2. Obtenha a probabilidade p_k de que, num grupo de 500 pessoas, exatamente k façam aniversário no dia 31 de dezembro. Faça a hipótese de que a distribuição seja uniforme ao longo dos dias do ano.

3. Uma urna contém N_1 bolas brancas e N_2 bolas pretas. Retira-se aleatoriamente M bolas da urna, sem reposição.

a) Mostre que a probabilidade de termos n bolas brancas entre elas é dada pela distribuição hipergeométrica,

$$p_n = \frac{\begin{pmatrix} N_1 \\ n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N_2 \\ M-n \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N_1+N_2 \\ M \end{pmatrix}}$$

b) Mostre que no limite $N_1 \to \infty,\ N_2 \to \infty$ com $\gamma = N_1/N_2$ constante, a probabilidade se reduz a:

$$p_n = (1+\gamma)^{-M}\begin{pmatrix} M \\ n \end{pmatrix}\gamma^n.$$

4. Construa a densidade de probabilidade correspondente à função característica $g(k) = [1 + 2\cos(ka)]/3$ e obtenha os seus momentos.

5. Obtenha todos os momentos da densidade de probabilidade retangular

$$\rho(x) = \begin{cases} \frac{1}{2a}, & \text{para } -a < x < a; \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases}$$

6. Calcule a função característica para a densidade de probabilidade retangular e a partir de sua expansão em série de Taylor determine os momentos dessa distribuição.

7. Obtenha a função geratriz para a distribuição geométrica $p_\ell = ab^\ell$, com $a + b = 1$ e $\ell = 0, 1, 2, \ldots$. A partir dela, determine a média e a variância para esta distribuição discreta.

8. Seja n uma variável aleatória inteira cuja função geratriz é $G(z)$. Obtenha as funções geratrizes das variáveis aleatórias $n + 1$ e $2n$.

9. Determine os cumulantes da distribuição de Poisson:

$$p_i = e^{-\alpha} \frac{\alpha^i}{i!}.$$

10. Escreva um algoritmo para gerar números aleatórios distribuídos de acordo com a densidade de probabilidade exponencial

$$\rho(x) = \alpha \exp(-\alpha x),$$

$x \geq 0$, a partir de números aleatórios distribuídos uniformemente no intervalo $[0, 1]$. Gere um conjunto de números no computador e compare o histograma obtido com a expressão analítica.

11. Obtenha as densidades de probabilidade marginal e condicional para a distribuição anelar de duas variáveis e raio a, dada por $\rho(x_1, x_2) = \frac{1}{\pi}\delta(x_1^2 + x_2^2 - a^2)$.

12. Seja $x_j, j = 1, 2, \ldots$ um conjunto infinito de variáveis aleatórias independentes, igualmente distribuídas com uma densidade de probabilidade $\rho(x)$ e função característica $g(k)$. Seja r uma variável estocástica inteira e positiva, com probabilidade p_r e função geratriz $G(z)$. A variável $y = x_1 + x_2 + \ldots + x_r$ é também aleatória. Mostre que a sua função característica é $G(g(k))$. A distribuição de y é chamada de *distribuição composta* por Feller (Cap. VII).

13. Gere uma sequência de números aleatórios $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ que assumem os valores -1 e $+1$ com igual probabilidade. Faça um gráfico de $f_n = (\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \ldots \xi_n)/n$ como função de n. Verifique que o seu resultado numérico é compatível com $\lim_{n\to\infty} f_n = 0$, como determina a lei dos grandes números. Repita o procedimento para o caso em que os números aleatórios sejam gerados de acordo com a distribuição de Lorentz centrada na origem

$$\rho(\xi) = \frac{1}{\pi(1+\xi^2)}.$$

Seus novos dados são consistentes com $f_n \to 0$? Comente o seu resultado.

14. Use a fórmula de Stirling

$$n! \approx \sqrt{2\pi n}\, n^n \exp(-n),$$

que é uma boa aproximação para $n!$ se $n \gg 1$, para mostrar que a distribuição binomial

$$p_N(\ell) = \left(\begin{array}{c} N \\ \ell \end{array} \right) a^\ell b^{N-\ell}$$

com $a + b = 1$, é bem descrita por uma distribuição gaussiana

$$p_N(\ell) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi N b}} \exp\left[-\frac{(\ell - Na)^2}{2Nb} \right],$$

para N e ℓ grandes (muito maiores que 1). (Sugestão: faça a expansão em série de Taylor da função $\ln p_N(\ell)$ em torno de seu ponto de máximo).

15. Considere um passeio aleatório unidimensional descrito por uma sequência $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ de variáveis aleatórias independentes que tomam os valores $+1$ (passo à direita) e -1 (passo à esquerda). Suponha, entretanto, que a probabilidade de que $\sigma_j = +1$ seja igual a p se j for ímpar e q se j for par, com $p + q = 1$. Consequentemente, a probabilidade de que $\sigma_j = -1$ será q se j for ímpar e p se j for par. Cada passo corresponde a uma distância h. Determine a distribuição de probabilidades da posição $x = h(\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n)$ da partícula que executa o passeio aleatório depois de n passos.