Curso de Pós-graduação em Física - UFF

Introdução a Sistemas Estocásticos e Modelos com Estados Absorventes - 2016.2

Prof. Nuno Crokidakis

3$^{\underline{a}}$ Série de Exercícios

1. Considere uma caminhada unidimensional aleatória isotrópica numa rede de N sítios com condições de contorno periódicas. A partícula está na origem no instante inicial.

   a) Mostre que a probabilidade de que a partícula esteja na posição n após ℓ passos é dada por

   $$P_\ell(n) = \frac{1}{N}\sum_k (\cos k)^\ell e^{ikn},$$

   com $k = 2\pi j/N$, $j = 0, 1, 2, \ldots, N-1$.

   b) Transformando a soma acima numa integral sobre k, mostre que no limite $\ell \gg 1$ a distribuição de probabilidades é dada por uma gaussiana, ou seja

   $$P_\ell(n) \approx (2\pi\ell)^{-1/2} \exp(-n^2/2\ell).$$

2. Uma cadeia é constituida por uma sucessão de três tipos de átomos (A, B e C). Dois átomos de um mesmo tipo nunca são primeiros vizinhos. Um átomo B sucede um átomo A com probabilidade 1/3 e um átomo A sucede um átomo B com a mesma probabilidade. Um átomo A sucede um átomo C com probabilidade 1.

   a) Construa a matriz estocástica que descreve este modelo.

   b) Obtenha a probabilidade de cada átomo $P(A)$, $P(B)$ e $P(C)$ no estado estacionário, bem como as probabilidades dos possíveis pares de átomos primeiros vizinhos neste mesmo estado.

   c) Usando o método algébrico, determine a probabilidade de cada átomo ser encontrado no instante ℓ, dado que no instante inicial temos $P_0(A) = 1$ e $P_0(B) = P_0(C) = 0$. Mostre que as probabilidades tendem aos valores estacionários no limite $\ell \to \infty$.

3. Use o método da função geratriz para determinar a solução da equação mestra correspondente ao modelo das urnas de Ehrenfest.

4. A matriz de evolução associada a uma cadeia de Markov de um sistema de dois estados é dada por

$$W = \begin{pmatrix} -b & q \\ b & -q \end{pmatrix}.$$

Assim, a taxa de transição de processo $1 \to 2$ é b e a do processo inverso é q.

a) Determine as potências W^ℓ e obtenha as matrizes e^{Wt} e $(zI - W)^{-1}$. Com essas matrizes, determine o vetor probabilidade $P(t)$ e sua transformada de Laplace $\hat{P}(z)$, adotando como condição inicial

$$P(0) = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}.$$

Determine $P(\infty)$ diretamente e também a partir da transformada de Laplace.

b) Trate o modelo de forma perturbativa usando $W = W_0 + \lambda V$, com

$$W_0 = b \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},$$

$$V = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

e $\lambda = q - b$. Obtenha o vetor de probabilidade estacionário P como série de potências em λ. Some a série e compare com o resultado do item a.

5. Considere uma extensão do modelo do votante majoritário na rede quadrada. Um indivíduo no sítio i pode agir de forma independente dos seus vizinhos com probabilidade p e com a probabilidade complementar $1 - p$ ele segue a regra usual do modelo. Assim, com probabilidade p o indivíduo escolhe com igual probabilidade umas das duas opiniões possíveis, e em caso contrário ele segue a maioria dos seus vizinhos com probabilidade $1 - q$ e a minoria com probabilidade q. Considerando a aproximação de campo médio simples, escreva a taxa de transição $\omega_i(\sigma)$, e determine a equação diferencial para a evolução da magnetização por spin. Ache a solução dependente do tempo $m(t)$, assim como a solução estacionária m^*. Você deve verificar que o modelo

ainda exibe a transição de fase ordem-desordem, e então determine o expoente crítico β e compare esse expoente com o valor obtido no modelo do votante majoritário original. Encontre também a dependência de q_c com p, verificando se o valor $q_c = 1/6$ é recuperado para $p = 0$. Para quais valores de p a transição deixa de existir? Considerando todos os seus resultados, faça um esboço do diagrama de fases do modelo no plano q_c contra p. Qual a natureza das fases que esse diagrama separa?

6. Considere o processo de contato com uma taxa adicional de criação espontânea de partículas h.

   a) Escreva a equação mestra para o modelo.

   b) Obtenha a equação para a densidade de partículas ρ na aproximação de campo médio de um sítio.

   c) Obtenha $\rho(\lambda, h)$ no estado estacionário, construindo o gráfico de $\rho(\lambda)$ para alguns valores pequenos de h.

   d) Considere $\rho(\lambda = \lambda_c, h)$ para valores pequenos de h e obtenha o expoente crítico δ na aproximação de campo médio. Observe que se trata do expoente δ estático, ou seja, o que corresponde à "isoterma" crítica $(\lambda = \lambda_c)$.